Introduction aux courbes elliptiques
Cours 1 - Fonctions à deux variables

2019/2020 - A. RIDARD

École d'ingénieurs ensibs Université Bretagne Sud

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

Dans ces rappels, on considère une fonction réelle à une variable réelle

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Il s'agit d'un "procédé d'association" qui à tout réel x associe au plus un réel noté alors $f(x)$.
Plus rigoureusement, f est une relation binaire sur $\mathbb{R}$ telle que tout réel x soit en relation avec au plus un réel noté alors $f(x)$.

On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f c'est à dire l'ensemble des réels x en relation avec un réel noté $f(x)$ (son image par f) :

$$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$$

Définition (Courbe représentative)

On appelle courbe représentative de f l'ensemble :

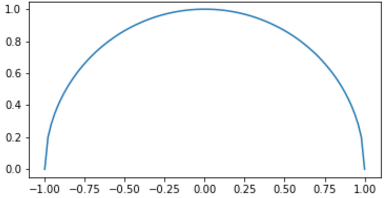
$$\mathscr{C}_f = \left\{ \left(x, f(x)\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathscr{D}_f \right\}$$

C'est tout simplement la représentation graphique de la relation binaire f sur $\mathbb{R}$, et donc une partie du plan $\mathbb{R}^2$.

Une courbe représentative

```python
# Importation des modules
import numpy as np
import pylab as pl

# Définition de la fonction de R vers R
def f(x):
    return np.sqrt(1-x**2)

# Représentation graphique
x = np.linspace(-1,1,100)
y = f(x)

pl.subplot(1,1,1,aspect='equal')
pl.plot(x,y)
pl.savefig('courbeRep.png')
```

Une courbe représentative



Pour étudier localement une telle fonction, on utilise les notions suivantes :

Définition (Limite)

On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en $x_0 \in \mathbb{R}$ et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou plus simplement $\lim\limits_{x_0} f = l$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

- On peut aussi faire l'étude asymptotique de f c'est à dire étudier f "au voisinage" de l'infini
- La limite de f peut être infinie ou ne pas exister (les deux cas de divergence)

Définition (Continuité)

On dit que f est continue en $x_0 \in \mathscr{D}_f$ si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- "Au voisinage de x_0, $f(x)$ est proche de $f(x_0)$"
- Lorsque x_0 n'appartient pas à $\mathscr{D}_f$, on peut essayer de prolonger par continuité f en x_0

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ et $\lim_{x \to 0} f(x)$.
2. En déduire le prolongement par continuité de f en 0.

Définition (Dérivabilité)

On dit que f est dérivable en $x_0 \in \mathscr{D}_f \setminus \partial\mathscr{D}_f$ si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe et est réelle}$$

Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite.

- $\partial\mathscr{D}_f$ désigne "le bord" de $\mathscr{D}_f$ donc $\mathscr{D}_f \setminus \partial\mathscr{D}_f$ représente "l'intérieur" de $\mathscr{D}_f$
- On définit ainsi la fonction dérivée f' que l'on calcule en général à l'aide de formules
- En posant $x = x_0 + h$, on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existe et est réelle}$$

Propriété (DL à l'ordre 1)

Si f est dérivable en x_0, alors "au voisinage de x_0" :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$$

- "Au voisinage de x_0, $f(x)$ est proche de $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$"
- Une fonction dérivable en un réel "ressemble" à une fonction affine au voisinage de ce réel
- En posant $x = x_0 + h$, on obtient :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h) \quad \text{avec} \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$$

- Cette condition est même suffisante pour que f soit dérivable en x_0

Propriété (Tangente)

Si f est dérivable en x_0, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$ d'équation :

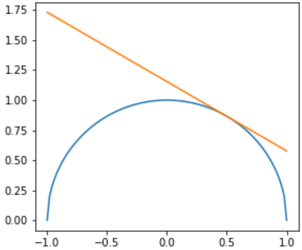
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- C'est la droite de coefficient directeur $f'(x_0)$ et passant par le point $(x_0, f(x_0))$
- La courbe représentative d'une fonction dérivable en un réel "ressemble" à une droite au voisinage de ce réel
- Par définition, une tangente d'une courbe représentative ne peut pas être verticale

Une tangente

```
# Importation des modules
import numpy as np
import pylab as pl

# Définition de la fonction de R vers R
def f(x):
    return np.sqrt(1-x**2)

# Représentation graphique
x = np.linspace(-1,1,100)
y1 = f(x)
y2 = (-1/np.sqrt(3))*(x-1/2)+f(1/2)

pl.subplot(1,1,1,aspect='equal')
pl.plot(x,y1)
pl.plot(x,y2)
pl.savefig('tangente.png')
```

Une tangente



?

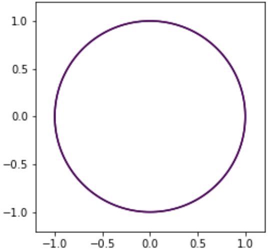
Toutes les courbes du plan sont-elles des courbes représentatives de fonctions à une variable ?

Une courbe "non représentative"

```
# Importation des modules
import numpy as np
import pylab as pl
```

```
# Définition de la fonction de R² vers R
def f(x,y):
    return x**2+y**2-1

# Représentation graphique
x = np.linspace(-1.2,1.2,100)
y = np.linspace(-1.2,1.2,100)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)

pl.subplot(1,1,1,aspect='equal')
pl.contour(X,Y,Z,[0])
pl.savefig('courbeNonRep.png')
```

Une courbe "non représentative"



On considère maintenant une fonction réelle à deux variables réelles

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

On note encore $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f :

$$\mathscr{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \text{ existe}\right\}$$

Définition (Surface représentative)

On appelle surface représentative de f l'ensemble :

$$\mathscr{S}_f = \left\{ (x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathscr{D}_f \right\}$$

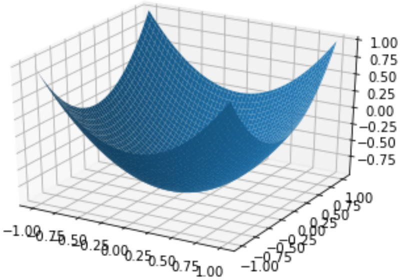
C'est tout simplement la représentation graphique de la relation binaire f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, et donc une partie de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Une surface représentative

```
# Importation des modules
import numpy as np
import pylab as pl
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

```
# Définition de la fonction de R^2 vers R
def f(x,y):
    return x**2+y**2-1

# Représentation graphique
x = np.linspace(-1,1,100)
y = np.linspace(-1,1,100)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)

fig = pl.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
ax.plot_surface(X,Y,Z)
pl.savefig('surfRep.png')
```

Une surface représentative



Définition (Courbes de niveaux)

On appelle courbe de niveau k de f l'ensemble :

$$\mathscr{C}_{f,k} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = k\}$$

C'est tout simplement l'ensemble des antécédents de k par f, et donc une partie de $\mathbb{R}^2$.

?

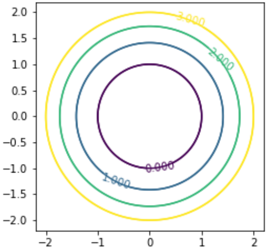
Comparer $\mathscr{C}_{f,k}$ et $\mathscr{S}_f \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = k\}$.

Des courbes de niveaux

```
# Importation des modules
import numpy as np
import pylab as pl
```

```
# Définition de la fonction de R^2 vers R
def f(x,y):
    return x**2+y**2-1

# Représentation graphique
x = np.linspace(-2.2,2.2,100)
y = np.linspace(-2.2,2.2,100)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)

pl.subplot(1,1,1,aspect='equal')
pl.contour(X,Y,Z,[0,1,2,3])
ln = pl.contour(X,Y,f(X,Y),[0,1,2,3])
pl.clabel(ln)
pl.savefig('courbesNiv1.png')
```

Des courbes de niveaux



Étudier les courbes de niveaux de f permet de mieux "comprendre" f

Comment peut-on généraliser à $\mathbb{R}^2$ (et même à n'importe quel ev) la notion de valeur absolue ?

Définition (norme et evn)

Une norme sur un ev E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ (homogénéité)
2. $\forall (u,v) \in E^2,\ N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall u \in E,\ N(u) \geq 0$ (positivité)
4. $\forall u \in E \setminus \{0_E\},\ N(u) > 0$ (stricte positivité)

L'ev E muni d'une norme N est un espace vectoriel normé (evn) noté (E,N).

- Les normes sont souvent notées $\|.\|$, elles servent à définir la longueur d'un vecteur
- La valeur absolue est une norme sur $E = \mathbb{R}$
- Sur $E = \mathbb{R}^2$, on peut définir plusieurs normes :
  - $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$
  - $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$ (norme euclidienne vue au lycée)
  - $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$

Définition (normes équivalentes)

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\forall u \in E,\ \alpha N_2(u) \leq N_1(u) \leq \beta N_2(u)$$

- Dans $\mathbb{R}^2$, les trois normes définies précédemment sont équivalentes
- En fait, dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Soit $(E, \|.\|)$ un evn, a un vecteur de E et R un réel strictement positif.
La boule ouverte de centre a et de rayon R, notée $B(a,R)$, est définie par :

$$B(a,R) = \{u \in E \mid \|u - a\| < R\}$$

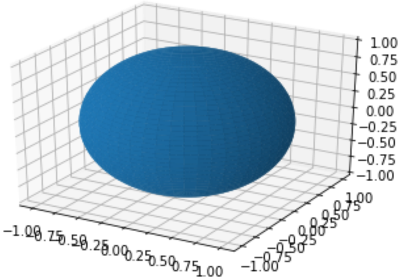
Représenter la boule unité (de centre 0_E et de rayon 1) dans :

1. $(\mathbb{R}, |.|)$
2. $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$
3. $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$
4. $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$

Boule unité dans $(\mathbb{R}^3, \|.\|_2)$

```
# Importation des modules
import numpy as np
import pylab as pl
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from itertools import product, combinations

# Représentation graphique de la surface paramétrée
fig = pl.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

u = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100) # longitude
v = np.linspace(0, np.pi, 100) # colatitude

# Coordonnées sphériques
x = np.outer(np.cos(u), np.sin(v))
y = np.outer(np.sin(u), np.sin(v))
z = np.outer(np.ones(np.size(u)), np.cos(v))

ax.plot_surface(x, y, z)
pl.savefig('boule.png')
```

Boule unité dans $(\mathbb{R}^3, \|.\|_2)$



On peut maintenant généraliser la continuité et la dérivabilité aux fonctions à deux variables.

Définition (Limite)

On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et on note $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$ ou plus simplement $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f = l$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f,\ \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta \Longrightarrow |f(x,y) - l| < \epsilon$$

- Cette propriété est dite topologique car elle ne dépend pas de la norme utilisée
- Pour montrer $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$, on majore $|f(x,y) - l|$ par une quantité qui tend vers 0 quand $(x,y) \to (x_0,y_0)$
- Pour montrer $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) \neq l$, on prend un "chemin" selon lequel $f(x,y)$ ne tend pas vers l quand $(x,y) \to (x_0,y_0)$

Définition (Continuité)

On dit que f est continue en $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}_f$ si :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$.

Montrer que f est continue en $(0,0)$.

Définition (Dérivées partielles)

On dit que f admet une première dérivée partielle en $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}_f \setminus \partial\mathscr{D}_f$ si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{existe et est réelle}$$

Dans ce cas, on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
De même, on dit que f admet une deuxième dérivée partielle en $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}_f \setminus \partial\mathscr{D}_f$ si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{existe et est réelle}$$

Dans ce cas, on la note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

On définit ainsi les fonctions dérivées pratielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ que l'on calcule en général à l'aide de formules

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$.

Montrer que f admet les deux dérivées partielles en $(0,0)$.

Pour généraliser la notion de dérivabilité, il nous faut plus que ces dérivées partielles.

Définition (Différentiabilité)

On dit que f est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}_f \setminus \partial\mathscr{D}_f$ si "au voisinage de (x_0, y_0)", il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, notée $df(x_0, y_0)$, vérifiant :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).(h_1, h_2) + \|(h_1, h_2)\|\epsilon(h_1, h_2) \quad \text{avec} \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1, h_2)$$

Dans ce cas, $df(x_0, y_0)$ est appelée la différentielle de f en (x_0, y_0) et on a :

$$df(x_0, y_0).(h_1, h_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Il s'agit en fait du DL à l'ordre 1 de f en (x_0, y_0)

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}.$$

Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

Ce n'est pas parce que f admet les deux dérivées partielles en (x_0, y_0) que f est différentiable en (x_0, y_0).
Considérer en $(0,0)$ la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Définition (Jacobienne)

On appelle jacobienne de f en (x_0, y_0), la matrice (dans les bases canoniques) de l'application linéaire $df(x_0, y_0)$:

$$\mathscr{J}f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Les formules connues de dérivées restent vraies sur la jacobienne.
Par exemple, $(uv)'(x_0) = u'(x_0) \times v(x_0) + u(x_0) \times v'(x_0)$ devient :

$$\mathscr{J}(fg)(x_0, y_0) = \mathscr{J}f(x_0, y_0) \times g(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \times \mathscr{J}g(x_0, y_0)$$

De la même manière que l'on note $(uv)' = u' \times v + u \times v'$, on pourra noter tout simplement :

$$\mathscr{J}(fg) = \mathscr{J}f \times g + f \times \mathscr{J}g$$

On considère les fonctions

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

Déterminer $\mathscr{J}(fg)(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition (Point critique)

On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

On considère la courbe de niveau 0 de f d'équation $f(x,y)=0$.

A l'inverse de ce qui a été fait précédemment [1], on va étudier f pour mieux comprendre cette courbe de niveau.

1. Rappelez-vous, étudier les courbes de niveaux de f pour mieux "comprendre" f

Heuristique

Si f est différentiable en (x_0, y_0), on a "au voisinage de (x_0, y_0)" :

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \simeq f(x_0, y_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

c'est à dire (en posant $x = x_0 + h_1$ et $y = y_0 + h_2$) :

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Si $f(x_0, y_0) = 0$ et si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors "au voisinage de (x_0, y_0)" :

$$f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y \simeq y_0 - (x - x_0) \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Théorème des fonctions implicites

Soit f une fonction différentiable en (x_0, y_0) telle que $f(x_0, y_0) = 0$.
Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors "au voisinage de (x_0, y_0)" :

$$f(x,y) = 0 \iff y = \phi(x)$$

avec ϕ dérivable vérifiant $\phi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))}$

Si c'est $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ qui est non nulle, il suffit d'échanger les rôles de x et y

Propriété (équation de la tangente)

Soit f une fonction différentiable en (x_0, y_0).
Si (x_0, y_0) n'est pas un point critique de f, alors la courbe d'éq. $f(x,y) = 0$ admet une tangente au point (x_0, y_0) d'éq. :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Démontrer cette propriété.